Algebra 1 24.02.2023

1. Dane są ideały I, J pierścienia $R = \mathbb{Z}[i]$:
   $I = (4+i, 2-i)$, $J = (8-i)$.
   Sprawdź, czy któryś z ideałów $I \cap J, I+J$ jest ideałem pierwszym w R.

2. Niech I_i oznacza ideał generowany przez element $3x^2+6$ w pierścieniu R_i, $i = 1, 2, 3$, gdzie $R_1 = \mathbb{Z}[x], R_2 = \mathbb{Q}[x], R_3 = \mathbb{Q}[x, y]$.
   (a) Dla jakich i, R_i/I_i jest ciałem?
   (b) Dla jakich i, R_i/I_i jest dziedziną?

3. Niech $R = \mathbb{Z}[i\sqrt{7}]$.
   (a) Zbadać, czy grupa $U(R)$ elementów odwracalnych pierścienia R jest cykliczna.
   (b) Uzasadnij, że R nie jest dziedziną z jednoznacznością rozkładu.

4. Zbadaj rozkładalność wielomianu $f = 6x^3 - 3x + 6$ w pierścieniach:
   (a) $\mathbb{Z}[x]$.
   (b) $\mathbb{Q}[x]$.
   (c) $\mathbb{R}[x]$.

5. Załóżmy, że G jest grupą rzędu pq, gdzie $p < q$ są liczbami pierwszymi. Wykaż, że G ma dokładnie $p-1$ elementów rzędu p lub G ma dokładnie $q(p-1)$ elementów rzędu p.

Algebra 1 Teoria

1. Niech H będzie podgrupą grupy G.

   a) Sformułuj twierdzenie Lagrange'a.

   b) Wykaż, że liczba warstw lewostronnych grupy G względem podgrupy H jest równa liczbie warstw prawostronnych (bez założenia o skończoności grupy G).

2. a) Podaj definicję rzędu $o(a)$ elementu a grupy G.

   b) Udowodnij, że jeśli $a \in G$ ma rząd skończony oraz $\phi : G \longrightarrow H$ jest homomorfizmem grup, to $o(\phi(a))$ dzieli $o(a)$.

3. a) Sformułuj twierdzenie Sylowa.

   b) Wyjaśnij, dlaczego jeśli dla liczby pierwszej p dzielącej $|G|$ w grupie G jest tylko jedna p-podgrupa Sylowa, to jest ona podgrupą normalną.

4. a) Podaj definicję największego wspólnego dzielnika elementów a, b dziedziny R.

   b) Wykaż, że w dziedzinie ideałów głównych R dla dowolnych $a, b \in R$ mamy $aR + bR = dR$, gdzie $d \sim NWD(a, b)$.

5. a) Podaj definicję elementu nierozkładalnego dziedziny całkowitości R.

   b) Udowodnij, że jeśli R jest dziedziną ideałów głównych i $a \in R$ jest elementem nierozkładalnym, to aR jest ideałem maksymalnym w R.